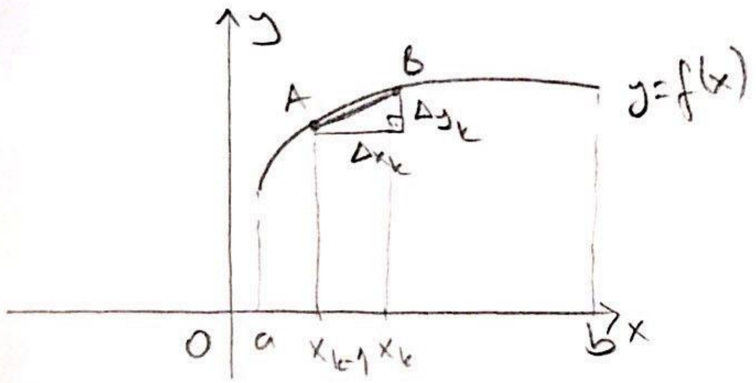
Yay uzunluğu hesabı

$y=f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $y=f(x)$ eğrisinin $x=a$ ve $x=b$ noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulalım:



$[a,b]$ nin bir bölünüşü $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. Şekildeki AB doğru parçasının uzunluğu ile AB yayının uzunluğu yaklaşık olarak birbirine eşittir.

Bu şekildeki doğru parçalarının uzunluklarının toplamı yaklaşık olarak eğrinin uzunluğunu verir. AB doğru parçasının uzunluğu

$$s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

dir. O halde verilen eğrinin uzunluğu yaklaşık olarak

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

dir.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 \left(1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k$$

$[x_{k-1}, x_k]$ da Ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

olacak şekilde $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır.

$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$ toplamı $\sqrt{1+f'(x)^2}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerindeki Rieman toplamı olduğundan $y=f(x)$ eğrisinin $x=a$ ve $x=b$ noktaları arasındaki uzunluğu

$$s=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

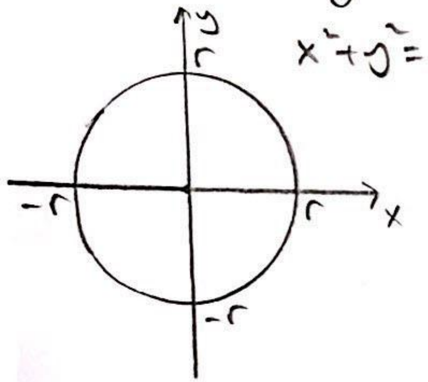
dir.

Benzer şekilde $x=g(y)$ eğrisinin $y=c$ ve $y=d$ noktaları arasındaki uzunluğu

$$l=\int_c^d \sqrt{1+g'(y)^2}\,dy$$

dir.

Örnek: r yarıçaplı çemberin çevre uzunluğunu hesaplayalım:



$x^2+y^2=r^2$

Çemberin çevre uzunluğunu hesaplamak için 1. bölgedeki parçasının uzunluğunu 4 ile çarpmak yeterlidir.

1. bölgedeki parça: $y=\sqrt{r^2-x^2}$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow s=4\int_0^r\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=4\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

$$=4r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=4r(\arcsin 1-\arcsin 0)=4r\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2\pi r$$

Örnek: $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ eğrisinin $[\frac{1}{2},2]$ aralığında kalan kısmının yay uzunluğunu bulalım:

$$y'=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}$$

$$s=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_{1/2}^{2}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}\right)dx$$

$$=\int_{1/2}^{2}\cancel{\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)^{2}}}\,dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}\right)\Bigg|_{1/2}^{2}=\frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{6}_{\,3}}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{48}-1\right)=\frac{33}{16}$$

Parametrik denklem ile verilen eğrinin yay uzunluğu

Parametrik denklemi $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ olan eğrinin $t=a$ ve $t=b$ noktaları arasındaki uzunluğu

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

olduğu kullanılırsa

$$s=\int_{a}^{b}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

dir.

Örnek: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ eğrisinin $t=0$ ve $t=\frac{\pi}{2}$ arasındaki parçasının uzunluğunu bulalım.

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t} = 3a\sin t\cos t$$

$$= \frac{3}{2}a\sin 2t$$

$$\Rightarrow S = \frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = -\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{3a}{4}(-1-1) = \frac{3a}{2}$$